Digitized by Google



Digitized by Google

11

IN ELEMENTA
GEOMETRIÆ PLANÆ

Secundum ſex priores EUCLIDIS libros commodiori ordine digeſtos

EXERCITATIO ACADEMICA

IN ALMO

DIVI THOMÆ

COLLEGIO NEAPOLITANO

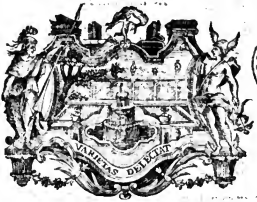
A CÆSARE CORVO, ET VINCENTIO FERRARIO

Geometriæ Auditoribus in Gymnaſio nuper ibidem anno 1750. aperto, recurrentibus ejusdem DIVI THOMÆ ſolemniis anni CIↃ.IↃCC.LII. publice habita

CUI PRÆFUIT ADMODUM REVERENDUS PATER LECTOR

FR. JOACHIMUS MARIA MAYO

Philoſophiæ, ac Sacræ Theologiæ Profeſſor, atque Geometriæ, Artiſque Oratoriæ in eodem Collegio Anteceſſor.



NEAPOLI Excudebat Joannes de Simone eodem anno MDCCLII.

EX PUBLICA AUCTORITATE.

Digitized by Google

Ὁ δ' ἐστὶ πᾶν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτηδευόμενον. Παντάπασι μὲν οὖν ἔφη. Οὐκοῦν τοῦτο ἔτι διομολογητέον; Τὸ ποῖον; ὡς τῆς τοῦ ἀεὶ ὄντος γνώσεως, ἀλλ' οὐ τοῦ ποτέ τι γιγνομένου καὶ ἀπολλυμένου. Εὐομολόγητον ἔφη· τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος, ἡ γεωμετρική, γνῶσίς ἐστιν. Ἕλκον ἄρα, ὦ γενναῖε, πρὸς ἀλήθειαν ψυχὴν εἴη ἂν καὶ ἀπεργαστικὸν φιλοσόφου διανοίας, πρὸς τὸ ἄνω σχεῖν, ἃ νῦν κάτω (οὐ δέον) ἔχομεν.

Doctrina hæc omnis cognitionis gratia quæritur. Sic eſt omnino. An non id quoque nobis eſt concedendum? Quid? Quod quæritur cognoſcendi illius gratia, quod ſemper eſt; non ejus, quod & oritur, quandoque & interit. Concedendum plane. Nam Geometria ejus, quod eſt, ſemper cognitio eſt. Attollet igitur, o generoſe Vir, ad veritatem animum, atque ita ad philoſophandum præparabit cogitationem; ut ad ſupera convertamus, quæ nunc (contra quam decet) ad inferiora dejicimus.

Plato dial. 7. de Republica.

ILLUSTRISSIMO MARCHIONI

NICOLAO FRAGGIANNI

E SACRATIORI REGALIS CAMERÆ APUD SERENISSIMUM NEAPOLITANUM REGEM CONSILIO

Regni Siciliæ Præſidi Conſultori: Uni ex Aulis Supremi Sanctæ Claræ Conſilii: atque Tribunalium, cum Reviſionis, tum Annonæ Præfecto; ac Regalis Juriſdictionis Delegato &c.

NOMINE PRÆFATI COLLEGII OMNES EJUSDEM MODERATORES.

QUæ diu temporis, inſtitutique ratione a noſtris exſulaverant ſcholis, nobiliſſimæ diſciplinæ, quæve ad celebris hujus, vetuſtique Collegii, in quo optimæ quæque ſcientiæ omni majori conatu fuerunt ſemper excultæ, ac perpetua Auditorum frequentia celebratæ, decorem, dignitatemque ſubſtinendam, maximis omnium votis expetebantur: jam ſupremo præſentiſſimo Numine, noſtris hiſce temporibus, in

Digitized by Google

univerſæ Neapolitanæ Juventutis profectum, in ipſas tandem adoptantur. Vertitur jam annus, quo in Gymnaſiis noſtris publice traduntur, & in deliciis habentur mathematicæ diſciplinæ, quibus olim tantopere ſuperbiebant Ægyptii, Græci gloriabantur, Romani, quamvis e limine ſalutatis, belli, paciſque artes comparabant, omniſque hoc noſtro ævo haud parum proficit, floretque litteraria Reſpublica: quare non modo in ipſis dein ſacrarum Scripturarum, ſanctorumque Patrum, divi potiſſimum Thomæ ſolidiori doctrinæ multum operæ dabitur, atque Philoſophorum explorabuntur opiniones; verum & per Matheſeos ſcientiam fallere neſciam, ope figurarum, quæ, teſte clariſſimo Galilæo, veri characteres ſunt ad Univerſi hujus volumen legendum, & ad ſupremi Opificis, *qui in numero, pondere, & menſura condidit omnia*, magnifica Opera intelligenda, Naturæ inquirentur arcana. Nihil ſane optandum, & ad cultiores litteras, ſcientiaſque expoliendas, & ad ſtudioſam Juventutem alliciendam, & ad Collegii ejuſdem opinionem promovendam, & amplificandam relinquebatur: ſatis abunde

qui-

quidem perinde, & noſtræ, & publicæ utilitati conſultum iri confidimus. Quoniam autem in erecto nuper Gymnaſio Matheſeos Auditores jam annum prioribus Geometriæ, Arithmeticæque elementis aliquantulum inſtructi primos emittere harum diſciplinarum flores incipiunt, & ſuos uberrimos fructus publico exponere judicio cupiunt, expetuntque: nos, quibus Collegii noſtri magna ineſt cura, priſcorum mortalium more, qui rerum primitias nonniſi illuſtrium, & præclariſſimorum Virorum æternæ memoriæ ſacrandas putarunt, has primas harum diſciplinarum exercitationes nonniſi Tibi ampliſſimo Viro, qui es Civitatis, & Regni noſtri munimen, & decus, & præclaro Nomini Tuo dicandas cenſuimus; ut qui hæc noſtra adire Gymnaſia non renuis, Tuo honorifico adſpectu nobis honoris complementum præſtes. Parum id conſulto a nobis factum crediderit forte quiſpiam, quia TE, quem ad ſublimia ducit dignitas, graviſſima detinent munia, & publica cum Sereniſſimi Regis noſtri, tum utriuſque Regni ejus, & nobiliſſimæ, ac peramplæ potiſſimum Civitatis hujus diſtinent urgentiora negotia,

Digitized by Google

ut exercitationibus hiſce noſtris intereſſe lubeat, huc advocare auſi ſumus. At is ſolum id nobis vitio vertet, quem præterit, TE ſublimi mente occupationes graviſſimas Palladis, & Muſarum ſacris elegantiſſime diffindere, & inter turbulentas curas magni Mæcenatis exemplo litteras tam enixe amare, ut a prima juventa, dum ob peculiare ingenium, ſingulareſque dotes per totum, qua late patet, Regnum primis Officiis addictus fuiſti, totiuſque Regni ſecretiora arcana Tibi fuerunt concredita; nobiliora, & tibi jucunda ſtudia numquam prætermiſiſti: quadere, uti fert omnium fama, tantam Tibi eruditionem comparaſti, ut non modo in juris, legumque ſcientia, quæ TE cominus ſpectat; verum & omni doctrina, ac Mathematicis potiſſimum non leviter modo tinctum, ſed penitus imbutum omnes norint. Noſter autem præſertim Sereniſſimus Princeps hanc Tuam cunctorum ore prædicatam virtutem conſtanti opere manifeſtat; quippe qui non ſolum ad omnes dijudicandas, & decidendas cunctorum Tribunalium cauſſas, inter ſuos a conſiliis ſupremos Viros te conſtituerit, atque utriuſque Regni ſui res gra-

viſſi-

Digitized by Google

viſſimas Tuis humeris imponat, ut videatur a Rege dictum, quod olim Næratio Priſco, ut Spartianus ſcribit, Trajanus Imperator dicebat: *Commendo tibi Provincias, ſi quid fatale contigerit*; verum & ipſiusmet propriæ Juriſdictionis Regiæ curam, delegationemque, quam ad libellam exigis, demandat. His adcedit quoque, quod cum Archimedis judicio Opera mathematica non alii ſint dicanda, niſi ei, qui harum rerum peritus ſit; profecto nemini, præterquam Tibi hæc ſacrari fas erat, qui adeo his incubuiſti nobilioribus ſtudiis, ut quemadmodum de se Galilæus quondam promebat, recte per iſta valeas *homines numero, doctos pondere, ignaroſve menſura comprehendere*. Quamvis vero plane magna ſint iſta, quæ optimo jure Tibi hæc ſacranda oſtendunt, alia quoque urget non levis cauſſa: & quidem, quæ nos propius tangit; ut qui in noſtris ſcholis fuiſti olim Auditor, non Te diſpliceat id muneris accipere, & eſſe earumdem perpetuus Patronus. Benigna igitur ac ſerena fronte, & naturali illa, qua es præditus, comitate excipias precamur, quod tibi, ILLUSTRISSIME DOMINE, exhibemus munus (ſi

tamen

Digitized by Google

tamen ita dicendum erit, quod qui dat, accepiſſe videtur) nec quid præſtemus, cogites, ſed quid optemus; atque in devicti animi monumentum id nos feciſſe, exiſtimes. Tua igitur benignitate freti ſecundo omine deſinimus, D. O. M. enixe deprecantes, ut Te totius Regni, ac Reipublicæ bono incolumen ſervet, & pro communibus curis animum TIBI ſuppeditet, & vires.

Digitized by Google

GEOMETRIÆ PLANÆ

PROPOSITIONES OMNES IN SEX PRIORIBUS EUCLIDIS ELEMENTIS CONTENTÆ, ET AD COMMODIOREM ORDINEM REDACTÆ.

I. Geometria eſt ea Matheſeos pars, quæ circa quantitatem in longum, latum, & altum extenſam occupatur (1): quamquam autem quantitatis hujus tres dimenſiones numquam a ſe mutuo ſejunctæ reperiantur; eas tamen abſtractionis ope ſeorſim Geometræ conſiderant: unde quantitatem ipſam in Lineam, Superficiem, & Solidum diſpeſcunt. Potiſſimum vero verſatur Geometria in contemplatione Figurarum, quæ cum lineis, tum ſuperficiebus clauduntur. Quare ſicuti hujuſmodi Figuræ poſſunt eſſe vel planæ, vel ſolidæ; ita Geometria ipſa in planam, & ſolidam, hoc eſt in planeometriam, & ſtereometriam dividitur. In hac autem exercitatione dumtaxat de Geometria plana diſſerendum nobis erit, quam ſicuti complexus eſt Euclides prioribus ſex ſuis elementis, ita ex eis eamdem illam mutuabimur.

EX PRIORE ELEMENTO.

II. In primo elemento ediſſerit Euclides, cum de lineis rectis, tum de triangulis, & parallelogrammis, quæ lineis rectis continentur: ejus propoſitiones ſunt quadraginta octo, quarum triginta quatuor ſunt theoremata, quibus rectilineorum affectiones demonſtrat, & quatuordecim problemata, quibus eorumdem conſtructiones exponit. Sed quemadmodum theoremata, & proble-

(1) A terræ dimenſione Γεωμετρία dicta eſt, quaſi terræ menſura, vel ars ipſa terram dimetiendi a voce Græca γέα, aut γῆ, *terra*, & μετρέω ſeu μετρῶ, *metior*. Cauſſam nomini præbuit, quod a terræ dimenſione ars hæc cœperit; ut ſcribit Cic. 4. Acad. etenim teſte Servio ad 3. Eclog. & Proclo, talis diſciplina inventa ſuit, quum Nilus æquo plus creſcens, confudiſſet terminos poſſeſſionum, ad quos innovandos adhibiti ſunt Ægyptii Philoſophi, qui lineis agros diviſerunt.

Digitized by Google

mata ſeorſim exponere placet; ita ad certas quoque claſſes utraque revocare conabimur.

THEOREMATA PRIORIS ELEMENTI.

III. Prioris Elementi theoremata partim reſpiciunt rectas, ſive ſibi mutuo occurrentes, ſive inter ſe parallelas, partim triangula, & partim denique parallelogramma cum in ſe inſpecta, tum inter ſe invicem collata. Unde ſicuti ea ad tres claſſes commode revocari poſſunt, ita eodem hoc ordine hic a nobis exponentur.

IV. Et quidem circa rectas ſibi mutuo occurrentes, & angulum conſtituentes quatuor occurrunt theoremata. Nimirum I. Ad eamdem rectam lineam duabus eiſdem rectis lineis non conſtituentur duæ aliæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ terminos habentes (1). II. Cum recta linea inſiſtens ſuper alia recta linea angulos deinceps fecerit; eos vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet (2). III. Si ex puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppoſitas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ conſtituant cum illa angulos deinceps, duobus rectis æquales; indirectum erunt duæ illæ rectæ lineæ (3). IV. Si duæ rectæ ſe mutuo ſecent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter ſe erunt æquales (4).

V. Circa rectas vero parallelas, ſeu æquidiſtantes hæc ab Euclide demonſtrantur. I. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ (5). II. Si in duas

(1) Prop. 7. lib. 1. Euclides teſte Proclo reperit theorema hoc, ut eſſet lemma octavæ propoſitionis; non enim ad plura ſuam utilitatem extendit, nullumque alium uſum apud Geometras habet.

(2) Prop. 13. lib. 1. Hoc theorema ab Euclide fuit procuſum; qui ajente Proclo maximam in eo diligentiam adhibuit: etenim per illud & expoſuit modum, quo recta una ſuper altera inſiſtere debeat: nempe non in directum, ſed ad angulum, & quod angulus unus ſemper duobus rectis ſit minor; alias non eſſet angulus, ſed una recta.

(3) Prop. 14. lib. 1. Hoc theoremate Euclides convertit præcedentem, & per impoſſibile demonſtrat; converſa enim theorematum per impoſſibile oſtendi debent, ut inquit Proclus.

(4) Prop. 15. lib. 1. Theorema iſtud, teſte Eudemo a Thalete Mileſio fuit primum repertum, & ab Euclide deinceps demonſtratum; qua etiam demonſtratione innuit, ſi plures rectæ ſeſe mutuo ſecent, has efficere angulos ad ſectionem quatuor rectis æquales.

(5) In hoc theoremate Euclides alternos angulos appellat eos, qui neque ad eaſdem partes, neque deinceps ſunt; ſed ab incidente diſtinguuntur, quæ utri-

Digitized by Google

duas rectas lineas in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat vel angulum exteriorem æqualem interiori, & oppoſito ad eamdem partem, vel duos angulos interiores, ad eamdem partem poſitos, duobus rectis æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ (1). III. Si in duas rectas lineas parallelas tertia incidat recta linea; hæc efficiet & angulos alternos æquales, & angulum exteriorem æqualem interiori, & oppoſito ad eamdem partem; & duos angulos interiores ad eamdem partem poſitos duobus rectis æquales (2). IV. Quæ eidem ſunt parallelæ, inter ſe ſunt parallelæ (3). V. Quæ æquales, & parallelas ad eaſdem partes conjungunt rectas lineas, ſunt etiam æquales, & parallelæ (4).

VI. Quantum ad triangula in ſe inſpecta primo loco recenſebimus theoremata, quæ communes eorum proprietates continent. Nimirum I. In omni triangulo duo latera ſimul majora ſunt reliquo, quomodocumque ſumta (5). II. Si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ; eæ ſimul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli; angulum vero majorem continebunt (6). III. In omni triangulo, uno latere producto, exterior angulus eſt major utroque interiore, & oppoſito (7). IV. Omnis trianguli duo anguli ſimul, duobus rectis minores ſunt, quomodocumque ſumti (8). V. Demum, cujuſcumque trianguli uno latere producto angulus exterior eſt

 æqua-

trique inter parallelas exiſtit; & differunt, quod alter ſurſum, alter deorſum ponatur.

(1) Prop. 28. lib. 1. Hoc theorema repertum fuit ab Euclide; tamen a Ptolemæo diverſimode demonſtratur, teſte Proclo.

(2) Prop. 29. lib. 1. Theoremate iſto Euclides, ut inquit Proclus, utraſque præcedentes convertit; quod enim in utraque illa eſt quæſitum, poſitionem facit, & quæ in illis data ſunt, demonſtrare proponit.

(3) Prop. 30. lib. 1. Euclidis eſt hoc theorema, quo explicat reſpectum parallelarum; non autem hoc in omnibus ſemper contingit; non enim, quæ ejuſdem ſunt dupla, inter ſe ſunt dupla, ut inquit Proclus.

(4) Prop. 33. lib. 1. Confinium parallelarum eſt theorema iſtud: unde ipſo parallelogrammorum ortum latenter tradit Euclides; parallelogrammum enim fit ab æqualibus, & parallelis.

(5) Prop. 20. lib. 1. Hoc theorema ab Euclide editum, ut ſcibit Proclus, Epicurei impugnare conſueverunt, & ipſum tam manifeſtum eſſe dixerunt, ut probatione non egeat; at non animadverterunt, quod eſto ſenſu ſit notum; ſcientiam tamen nunquam gignere poſſet, niſi fuiſſet demonſtratione firmatum.

(6) Ex lib. 1. prop. 21. Euclidis.

(7) Ex lib. 1. prop. 16. Euclidis.

(8) Ex lib. 1. prop. 17. Euclidis. Per hoc theorema, ut inquit Proclus indeterminate demonſtrat Euclides: duos quoslibet trianguli angulos duobus rectis minores eſſe; at in propoſitione 32. determinabitur, quanto ſint minores, nempe reliquo trianguli angulo. Tres enim ipſius anguli duobus rectis æquales ſunt: quare duo, tanto minores erunt duobus rectis, quanto eſt reliquus angulus.

Digitized by Google

æqualis duobus interioribus, & oppoſitis ſimul ſumtis; & anguli omnes ſimul duobus rectis ſunt æquales (1).

VII. Secundo loco theoremata illa afferemus, quæ cujusque trianguli in ſe inſpecti affectiones nobis aperiunt; cujuſmodi ſunt hæc, quæ ſequuntur. I. Iſoſcelium triangulorum anguli ad baſim inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus lateribus, anguli infra baſim etiam inter ſe æquales erunt (2). Sicuti autem theorematis hujus pars prior illud nos docet, in omni triangulo æqualibus lateribus æquales angulos opponi; ita exinde proprietas trianguli æquilateri ſponte ſua deſcendit, nempe, quod ſicuti tria ejus latera ſunt æqualia, ita æquales ſint tres ipſius anguli. II. Si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos ſubtendentia pariter æqualia erunt (3). Unde colligere pronum eſt, ſi trianguli omnes anguli ſint æquales, cuncta etiam ejus latera æqualia eſſe debere. III. Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit (4): unde eruere licet, ſicuti in triangulo ſcaleno cuncta ejus latera ſunt inæqualia, ita & omnes ejus angulos eſſe pariter inæquales. IV. In omni viciſſim triangulo majori angulo majus latus opponitur (5): unde patet per contrarium, ſi omnes anguli trianguli ſint inæquales, triangulum eſſe ſcalenum. Iſtiuſmodi ſunt proprietates cujuslibet trianguli quoad latera inſpecti; quoad angulos vero ſolum Euclides in primo libro proprietatem oſtendit trianguli rectanguli, demonſtraturus in ſecundo libro affectiones trianguli obtuſanguli, & acutanguli: ejus theoremata ſunt. I. In triangulis rectangulis, quadratum, quod fit ex latere rectum angulum ſubtendente, quod Græce dicitur *hypothenuſa*, æquale eſt quadratis laterum rectum angulum continentium (6). II. Si quadra-

(1) Prop. 32. lib. 1. Hujus theorematis ortum Pythagoræ adſcribit Eudemus, ut Proclus tradit; qui etiam notat; ex hoc theoremate indigitari; quantum angulus exterior trianguli ſit major utroque interiore, & oppoſito nempe reliquo; & quantum duoquilibet anguli trianguli duobus rectis ſint minores, nempe uno. Unde hoc theorema complectitur doctrinam propoſitionis 16.& 17.& ex hoc etiam aperitur via ad reperiendum; omnium rectilineorum anguli quot rectis ſint æquales: omnis enim figura rectilinea in triangula reſolvitur.

(2) Prop. 5. lib. 1. Thales Mileſius hoc theorema reperit, teſte Proclo: is enim primus animadvertit æquicruris angulos ad baſim eſſe æquales, & more antiquorum ſimiles appellavit.

(3) Ex lib. 1. prop. 6. Euclidis, qui hoc theoremate convertit præcedentem.

(4) Ex Lib. 1. prop. 18. Euclidis.

(5) Ex Lib. 1. prop. 19. Euclidis, qua convertit præcedentem.

(6) Prop. 47. lib. 1. Theorema iſtud teſte Laertio, & Proclo, Pythagoræ ortum debet, qui ut ex Apollodoro apud eumdem Laertium, ob ejus inventionem ita

Digitized by Google

dratum ex uno latere trianguli æquale ſit quadratis, quæ ex aliis lateribus fiunt; angulus ſub iis lateribus contentus rectus erit (1).

VIII. Tertio loco recenſebimus theoremata, quæ relativas triangulorum affectiones reſpiciunt, ſeu quæ triangula exponunt inter ſe collata; hujuſmodi autem theoremata circa æqualitatem, & inæqualitatem potiſſimum verſantur; & ſunt. I. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, & angulos ſub iis lateribus contentos æquales; habebunt & baſim baſi æqualem, erunt reliqui anguli reliquis angulis æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur, eritque triangulum æquale triangulo (2). II. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & baſim baſi æqualem; & angulos ſub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt (3). III. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & angulum ſub iis lateribus contentum angulo majorem, & baſim baſi majorem pariter habebunt (4). IV. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & baſim baſi majorem; habebunt & angulum ſub iis lateribus contentum, angulo quoque majorem (5). V. Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, ſive quod æqualibus adjacet angulis, ſive quod uni æqualium angulorum opponitur; omnia reliqua etiam æqualia habebunt (*6*).

IX. Triangula inter parallelas conſtituta aliis communibus gau-

ita lætitia ſuit affectus, ut Hecatomben; hoc eſt, ſacrificium centum bovum Diis immolaverit.

(1) Prop. 48. lib. 1. Pythagoræ etiam adſcribitur theorema iſtud; quo præcedens ex toto convertitur.

(2) Prop. 4. lib. 1. Hoc theorema Euclides reperit, qui in eo demonſtrando utitur modo, qui fit per ſuperimpoſitionem, qui maximo uſui eſt apud Mathematicos; & Archimedes eum uſurpavit non ſolum in libro de centro gravitatis planorum; ſed etiam in ſolidis, ut de Conoidibus, & de Sphæroidibus.

(3) Prop. 8. lib. 1. quæ ad Euclidem refertur, qua ipſe convertit præcedentem.

(4) Prop. 24. lib. 1. Hanc propoſitionem Euclides opponit quartæ. Per illam enim angulos, qui ſunt ad vertices triangulorum æquales ponit, per hanc inæquales; per illam baſes æquales demonſtrat, per hanc inæquales.

(5) Prop. 25. lib. 1. Per tale theorema Euclides ipſe, & oppoſitum octavæ propoſitionis demonſtrat, & præcedentem convertit; quæ diverſimode ab aliis demonſtratur, ut tradit Proclus.

(6) Prop. 26. lib. 1. Theorema iſtud ad Thaletem Mileſium refertur auctorem, ut Proclus ex Eudemo tradit. Iſto autem Euclides doctrinam omnem æqualitatis, & inæqualitatis triangulorum claudit; & ad parallelas, & parallelogramma tranſit.

Digitized by Google

gaudent affectionibus; quas talia theoremata continent. I. Triangula in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (1). II. Triangula in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (2). III. Triangula æqualia in eadem baſi, & ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in iiſdem parallelis (3). IV. Triangula æqualia in æqualibus baſibus, ac in directum jacentibus, ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in iiſdem parallelis (4).

X. Tandem circa parallelogramma primo loco affectiones exponemus eorumdem abſolutas, quæ quodpiam parallelogrammum in ſe inſpectum ſequuntur, quas hæc theoremata oſtendunt. I. Parallelogrammorum ſpatiorum latera, quæ ex adverſo ſunt, inter ſe ſunt æqualia; ſimiliter autem & anguli; diagonalis vero ea bifariam dividit (5). II. Parallelogrammorum ſpatiorum eorum, quæ circa diametrum ſunt complementa, inter ſe ſunt æqualia (6).

XI. Poſtremo denique proprietates illas parallelogrammorum oſtendemus, quæ ipſa ſpectant tam inter ſe, quam cum triangulis collata, per hæc theoremata. I. Parallelogramma in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (7). II. Parallelogramma in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis conſtituta, ſunt etiam inter ſe æqualia (8). III. Si parallelogrammum, & triangulum habeant eamdem baſim, & ſint inter eaſ-

(1) Ex lib. 1. prop. 37. Euclidis.

(2) Ex lib. 1. prop. 38. Euclidis.

(3) Ex lib. 1. prop. 39. Euclidis, qua convertit 37.

(4) Ex lib. 1. prop. 40. Euclidis, qua convertit 38.

(5) Ex lib. 1. prop. 34. Euclidis. Quam hic de parallelogrammis demonſtrat, affectio, circulo quoque convenit, & ellipſi.

(6) Ex 1. lib. prop. 43. Euclidis, qui unum tantum hujus theorematis caſum exponit; eſto ejus tres ſint caſus: vel enim, quæ circa diametrum ſunt complementa ſe ſe in puncto tangunt, vel ſe ſecant, vel a ſe disjunguntur. Eadem autem ſemper congruit demonſtratio, quamquam non ſemper quadrilatera ſint ſupplementa, ut docet Commandinus.

(7) Ex Lib. 1. prop. 35. Euclidis, qui per hoc, & quæ ſequuntur theoremata parallelogrammi cujuslibet dimenſionem expoſuit. Hæc theoremata, ut Federicus Commandinus ex Proclo inquit, ex eorum numero ſunt, quæ in mathematicis diſciplinis admirabilia appellantur. Stupet enim vulgus ſtatim, ſi longitudo multiplicatam ſpatiorum æqualitatem non deſtruit; & tamen eadem exiſtente baſi, quantum parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur.

(8) Ex lib. 1. prop. 36. Euclidis. In præcedenti theoremate Euclides eaſdem baſes accepit, hic vero æquales: commune autem in iiſdem poſuit, inter eaſdem eſſe parallelas. Hoc theorema per baſes ſejunctas demonſtravit Euclides; attamen, ut inquit Proclus, a Theone demonſtratio fuit ad meliorem redacta formam, ut omnibus caſibus congruere videatur.

Digitized by Google

eaſdem parallelas conſtituta, erit parallelogrammum duplum trianguli (1).

EJUSDEM PRIORIS ELEMENTI PROBLEMATA.

XII. Per ejuſdem prioris Elementi problemata dein ortus, conſtructioneſque omnes rectilinearum figurarum nos docet Euclides. Quemadmodum autem ea partim ad rectas attinent, etiam perpendiculares, & parallelas, partim ad angulos, partim ad triangula, & partim ad parallelogramma ſive in ſe inſpecta, ſive inter ſe collata; ita per has claſſes ea proferre lubet.

XIII. Problemata, quæ communem rectarum indicant praxim, ſunt. I. Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere (2). II. Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori portionem æqualem abſcindere (3). III. Datam rectam lineam terminatam bifariam dividere (4).

XIV. Circa rectas perpendiculares, & parallelas hæc problemata, ortum earum deſignant. I. Ex puncto in recta linea dato, perpendicularem rectam lineam excitare (5). II. Super rectam infinitam, ex puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam demittere (6). III. Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere (7).

XV. Quæ ad angulos rectilineos cum in ſe, tum inter ſe inſpectos

(1) Ex lib. 1. prop. 41. Euclidis. Hujus theorematis demonſtratio etiam valet, ſi parallelogrammum, & triangulum habeant æquales baſes; nam cum triangula in baſibus æqualibus ſint æqualia, parallelogrammum, quod alterius eſt duplum, reliqui quoque duplum erit.

(2) Ex lib. 1. prop. 2. Euclidis; qui in ipſa dedit quidem punctum ſola poſitione, hoc enim tantum modo dari poteſt; lineam vero ſpecie, & magnitudine. Simul ſumſit punctum datum extra rectam datam; eſto poſſit eſſe, & in eadem recta, & in ejuſdem rectæ extremitate; in quo caſû eadem foret demonſtratio, eſto diverſa conſtructio.

(3) Ex lib. 1. prop. 3. Euclidis.

(4) Ex lib. 1. prop. 10. Euclidis; qui rectam terminatam ponit; ſiquidem ex utraque parte infinitam terminare non poſſumus; infinitæ vero ex altera parte tantum, ubicumque punctum accipiatur, inæqualis fiet ſectio. Apollonius Pergæus rectam lineam terminatam diverſimode ab Euclide bifariam ſecat, ope duorum circulorum ad modum primæ propoſitionis; attamen in idem convenit, teſte Commandino.

(5) Ex lib. 1. prop. 11. Euclidis, qui punctum in medio lineæ deſignat: eſto ſumi etiam poſſit in altera ejus extremitate; quo in caſu eadem efformanda eſt conſtructio, recta tantum producta.

(6) Prop. 12. lib. 1. Hoc problema, ut refert Proclus, Oenopides primus indagavit, utile ipſum ad Aſtrologiam exiſtimans: & datur in eo recta infinita; cum punctum extra ipſam ſumatur, ne cum linea data confundatur.

(7) Prop. 31. lib. 1. quæ eſt Euclidis; qui per tale problema ortum parallelarum videtur tradere.

Digitized by Google

ctos conſtructiones ſpectant, ſubjecta problemata exponunt. I. Datum angulum rectilineum bifariam ſecare (1). II. Ad datam rectam lineam, atque ad datum in ea punctum, angulum dato angulo rectilineo æqualem conſtituere (2).

XVI. Quæ vero ad triangula attinent problemata, ſunt. I. In data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere (3). Unde deducitur quoque, quonam pacto in data recta terminata conſtituatur triangulum cum iſoſceles, tum ſcalenum. II. Ex tribus rectis, quæ tribus aliis datis ſint æquales, triangulum conſtituere; oportet autem, ut ex tribus datis duæ ſimul reliqua majores ſint, quomodocumque ſumtæ (4).

XVII. Problemata denique quibus omnia parallelogramma, & præcipue quadratum conſtruuntur, ſunt. I. In data recta linea terminata quadratum conſtituere (5). II. Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo dato (6). III. Ad datam rectam lineam, dato triangulo, æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo (7). IV. Dato rectilineo, æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo (8).

EX

(1) Ex lib. 1. Prop. 9. Euclidis. Ex hoc problemate angulus ſolummodo rectilineus ſecari valet; quia aliorum ſectio ad elementarem inſtitutionem non attinet; angulus autem rectilineus hinc etiam ſecari poteſt, in quatuor angulos æquales, in octo, in ſexdecim &c. ſemper procedendo per augumentum duplex; eoquod omnis pars ſectionis ſemper bifariam ſecari poterit: in quamlibet vero aliam proportionem eum ſecare præſentem conſtructionem tranſgreditur.

(2) Prop. 23. lib. 1. Hoc problema ab Oenopide inventum fuiſſe tradit Eudemus.

(3) Ex lib. 1. prop. 1. Quæ eſt Euclidis, qui eſto ſolum in ipſa modum recenſeat, quo in data recta triangulum æquilaterum valeat conſtitui: poteſt tamen in ipſa recta conſtitui, & triangulum iſoſceles, ſi accipiatur ipſa recta vel æque major, vel æque minor; & triangulum ſcalenum; ſi non ex puncto, in quo illi duo circuli ſe ſecant, ſed ex alio in altera circulorum circumferentia quomodolibet deſignato rectæ ducantur; ſic enim tres rectæ trianguli inæquales oriuntur.

(4) Prop. 22. lib. 1. Hoc problema eſt Euclidis; attamen ejus demonſtratio a Theone fuit immutata; ut animadvertit Proclus.

(5) Prop. 46. lib. 1. Problema iſtud Euclides procudit, & præcipue deſervit conſtructioni propoſitionis 47. lib. 1. & ad totum elementum ſecundum.

(6) Ex lib. 1. prop. 42. Euclidis.

(7) Prop. 44. lib. 1. Antiqua ſunt, ut ait Eudemus, Pythagoreorum inventa iſtiuſmodi ſpatiorum applicationes, exceſſus, & defectus: cum enim ipſi propoſita recta, datum ſpatium toti rectæ cooptaverunt; tunc ſpatium illud lineæ applicare dixerunt: cum vero ſpatii longitudinem ipſa recta majorem fecerunt; tunc excedere: cum tandem minorem, tunc deficere. Euclides iſto in problemate applicationem parallelogrammi ad rectam recenſet; acturus dein de exceſſu, & defectu cum in ſecundo, tum in ſexto elemento, ut Proclus animadvertit.

(8) Prop. 45. lib. 1. Problema iſtud etiam eſt Euclidis, teſte Proclo. Qui per hoc problema, doctrinam, quam in duobus præcedentibus tradiderat de conſtitutione, & applicatione æqualium dato triangulo parallelogrammorum, univerſaliorem reddit, applicationemque ad quemlibet rectilineum extendit.

Digitized by Google

EX SECUNDO ELEMENTO.

I. IN ſecundo Elemento pertractat Euclides de potentiis rectarum; hoc eſt de quadratis, & rectangulis: comparatque rectangula, & quadrata, quæ e rectarum ſive bifariam, ſive utcumque ſectarum partibus fiunt: eorumque theoriam ea potiſſimum ratione proſequitur, ut proprietates trianguli obtuſanguli, & acutanguli, oſtendere valeat. Occurrunt in hoc elemento propoſitiones quatuordecim, quarum duodecim ſunt theoremata, & reliquæ duæ problemata; quæ hoc ordine proferenda ducimus.

THEOREMATA SECUNDI ELEMENTI.

II. Secundi hujus elementi theoremata partim varias quadratorum, & rectangulorum compoſitionem, quæ ex diverſa rectarum ſectione oritur; partim vero proprietates trianguli obtuſanguli, & acutanguli reſpiciunt. Secundum igitur has claſſes illa recenſebimus.

III. Prioris claſſis theoremata ſunt. I. Si fuerint duæ rectæ lineæ una quidem ſecta in quotcumque partes, altera vero inſecta; rectangulum, quod fit ex tota, & inſecta æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem inſecta (1). II. Si recta linea ſecta fuerit utcumque, quadratum, quod fit a tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex tota, & partibus (2).. III. Si recta linea ſecetur utcumque, rectangulum ex tota, & parte una æquale erit rectangulo ſub partibus, una cum quadrato, quod fit ex parte prædicta (3). IV. Si recta linea ſecetur utcumque, quadratum, quod fit a tota, æquale erit quadratis partium, una cum rectangulo bis

(1) Prop.1.lib.2. Non ſolum hoc theorema, verum & omnes ſecundi elementi propoſitiones judicio omnium Euclidi adſcribuntur, qui eas omnes direxit ad demonſtrandas cum obtuſanguli, tum acutanguli proprietates, ob quas totum ſecundum conſcripſit librum. Iſtiuſmodi fere omnes propoſitiones demonſtrantur axiomate illo. Totum eſt ſuis partibus ſimul ſumtis æquale. Decem prima hujus elementi theoremata, quæ ſpectant rectangula, & quadrata ex linearum ſectione oriunda, vera etiam in numetis repetiuntur, quoties, ut lineæ, dividuntur in partes; etenim rectangula quoque numerica ex multiplicatione duorum numerorum promarant, & quadrata numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum; unde de numeris idem valet, quod de lineis.

Ex hoc theoremate perſpicue conſtat; in quadratis ſpatiis, parallelogramma circa diametrum, quadrata eſſe.

(2) Prop.2.lib.2.

(3) Prop.3. lib. 2. Hoc, & duo præcedentia theoremata, demonſtrandæ multiplicationi plurimum deſerviunt.

ſub partibus contento (1). V. Si recta linea ſecetur biſariam, & non biſariam; erit rectangulum ex partibus inæqualibus, una cum quadrato portionis, quæ inter utramque ſectionem interjicitur, æquale ei, quod a dimidia deſcribitur quadrato (2). VI. Si recta linea ſecetur biſariam, eique alia in directum adjiciatur; erit rectangulum, quod fit ex tota, & adjecta, veluti ex unica linea in ipſam adjectam, una cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, ſimiliter tamquam ex unica linea (3). VII. Si recta linea ſecetur utcumque; quadrata, quæ fiunt ex tota, & parte una, æqualia erunt rectangulo bis contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (4). VIII. Si recta linea ſecetur utcumque; quadratum, quod fit ex tota, & parte una, veluti ex unica linea, æquale erit rectangulo quater contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (5). IX. Si recta linea ſecetur biſariam, & non biſariam; quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque ſectionem interjecta (6). X. Si recta linea ſecetur biſariam, eique alia in directum adjiciatur; quadrata duo, unum ex tota, & adjecta, veluti ex unica linea, alterum ex ipſa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta (7).

IV. Secundæ vero claſſis theoremata, quibus trianguli obtuſanguli, & acutanguli affectiones oſtendit Euclides, duo ſequentia ſunt. I. In triangulis obtuſangulis, quadratum, quod fit ex latere obtuſum angulum ſubtendente, majus eſt quadratis, quæ fiunt ex lateribus, obtuſum angulum continentibus, rectangulo bis contento ſub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtuſum adjungit ei perpendicularis ex oppoſito angulo demiſſa (8). II. In triangulis acutangulis quadratum, quod fit ex latere, acutum angulum ſubtendente, minus eſt quadratis,

(1) Prop. 4. lib. 2. Hoc theorema radicum quadraticarum extractioni non parum confert.

(2) Prop. 5. lib. 2. Theorema iſtud cum tribus, quæ ſequuntur, ad Algebram multum conducunt.

(3) Prop. 6. lib. 2.

(4) Prop. 7. lib. 2.

(5) Prop. 8. lib. 2.

(6) Prop. 9. lib. 2. Quæ cum reliquis, quæ ſequuntur, Trigonometriæ planæ deſerviunt.

(7) Prop. 10. lib. 2.

(8) Prop. 12. lib. 2. Ad hanc, & ſequentem propoſitionem totum dirigitur ſecundum ab Euclide elementum: & per hæc duo theoremata demonſtrat ipſe proprietates illas triangulorum, quas in primo libro reliquerat.

tis, quæ fiunt ex lateribus, acutum angulum continentibus, rectangulo bis contento ſub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abſcindit ex eo perpendicularis ex oppoſito angulo demiſſa (1).

SECUNDI ELEMENTI PROBLEMATA.

V. Secundi elementi problemata duo tantum ſunt, quæ etiam potentias rectarum ſpectant, nimirum I. Datam rectam lineam ſubinde dividere, ut rectangulum, quod fit ex tota, & parte una, æquale ſit quadrato partis alterius (2). II. Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere (3).

EX TERTIO ELEMENTO.

I. IN tertio elemento oſtendit Euclides præcipuas circuli proprietates; lineaſque plurimas ſive in circulo, ſive ad circulum ductas ſeſe inter comparat; circulorum etiam, & ſe mutuo interſecantium, & ſe invicem, ſive rectas tangentium affectiones explicat; anguloſve tandem, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias conſiſtunt, ſeſe inter componit. Continentur in hoc Elemento propoſitiones triginta ſeptem, quarum una, & triginta ſunt theoremata: & aliæ ſex problemata: quæ omnia per ſuas claſſes hoc ordine recenſebimus.

TERTII ELEMENTI THEOREMATA.

II. Hujus elementi theoremata ad quatuor claſſes commode revocari poſſunt; nam alia ſpectant rectas, quæ ad circuli cir-

(1) Prop. 13. lib. 2. Eſto Euclides in definitionibus lib. 1. acutangulum triangulum nuncupaverit illud, quod omnes acutos habeat angulos. Hic tamen omnia triangula appellat acutangula: propterea quod omnia angulum habeant acutum ſaltem unum; unde propoſitio hunc in modum exponitur quoad ſenſum: omnis trianguli latus, quod acutum ſubtendit angulum, minus poteſt, quam latera, acutum angulum continentia; quod & de rectangulo, & de obtuſangulo quoque valet.

(2) Prop. 11. lib. 2. Hoc problema ſoli geometricæ accidit medietati, non autem numericæ; nullus enim numerus ita ſecari poteſt; ut productum ex toto in partem unam, æquale ſit quadrato partis reliquæ. Hoc idem problema demonſtrat Euclides in ſexto libro: ubi diverſo modo illud exprimit dicens: datam rectam extrema, & media ratione ſecari. Hic autem, quoniam de proportione nihil tradiderat, non dicit media, ac extrema ratione ſecari.

(3) Prop. 14. lib. 2.

cumferentiam ducuntur; alia rectas, quæ circulum ipſum tangunt; alia circulos ſeſe invicem occurrentes; ac alia demum angulos, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſtituuntur.

III. Prioris generis theoremata ſunt hæc, quæ ſequuntur. I. Si in circuli diametro capiatur punctum quodvis, quod non ſit centrum, & ex eo ducantur ad circumferentiam plures aliæ rectæ lineæ; earum omnium maxima quidem erit illa, quæ tranſit per centrum, minima vero reliqua portio diametri; aliarum autem, quæ maximæ propinquiores ſunt, majores erunt ſemper remotioribus; & ab illo eodem puncto nonniſi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (1). II. Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ex quo ducantur plures rectæ lineæ, cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam; earum utique, quæ pertingunt ad concavam, maxima quidem erit illa, quæ tranſit per centrum, aliarum vero, quæ maximæ ſunt propinquiores, majores erunt ſemper remotioribus; viciſſim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima quidem erit illæ, quæ producta tranſit per centrum; aliarum vero, quæ minimæ ſunt propinquiores, minores erunt ſemper remotioribus; & ab illo eodem puncto, cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam, nonniſi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (2). III. Si e puncto intra circulum ſumto cadant ad ejus circumferentiam plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; aſſumtum punctum erit centrum circuli (3). IV. Si in circuli circumferentia duo puncta ſumantur, quæ puncta iſta conjungit recta linea, intra circulum cadet (4). V. Si recta linea per centrum ducta, aliam rectam lineam non ductam per centrum, bifariam ſecet, ſecabit ad angulos rectos; & ſi ſecet ad angulos rectos, ſecabit bifariam (5). Unde perſpicuum eſt quoque, ſi in circulo recta quædam linea ſecet aliam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos, in ſecante eſſe circuli centrum. VI. In circulo

(1) Prop.7.lib.3. Non ſolum hæc propoſitio, verum & totum tertium elementum ab Euclide acceptum, omnes ferunt.

(2) Prop.8.lib.3.

(3) Prop.9.lib.3.

(4) Prop.2.lib.3. qua indigitat quoque Euclides, rectam quamvis circulum tangentem in unico tantum puncto periferiæ occurrere; alioquin caderet intra circulum, & non eſſet tangens, ſed ſecans.

(5) Prop.3.lib.3. ex hoc theoremate Euclides latenter indicat, cum in circulo recta una aliam non ductam per centrum ſecaverit, tria evenire, & rectam ſecantem tranſire per circuli centrum; & aliam ſecare & bifariam, & ad angulos rectos.

culo ſi duæ rectæ lineæ ſeſe in centro non ſecent ; utraque bifariam non ſecabitur (1) . VII. In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro diſtant ; & quæ æqualiter a centro diſtant , inter ſe ſunt æquales (2) . VIII. In circulo maxima linearum in ipſo ductarum eſt diameter, ſeu quæ tranſit per centrum ; aliarum autem, quæ centro ſunt propinquiores , majores ſunt ſemper remotioribus (3). IX. In circulis æqualibus æquales rectæ lineæ æquales arcus abſcindunt , majorem quidem æqualem majori , minorem vero minori (4). X. In circulis æqualibus æquales arcus, æquales rectæ lineæ ſubtendunt (5) . XI. Si in circulo duæ rectæ, lineæ ſe mutuo ſecent , erit rectangulum ſub ſegmentis unius, æquale rectangulo ſub ſegmentis alterius (6) . Quæ proprietas obtinet , etiamſi duæ rectæ in circulo ductæ ſibi invicem extra circulum occurrant .

IV. Secundi generis theoremata ; quæ reſpiciunt rectas circulum tangentes , ſunt . I. Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eam erigatur , hæc tota cadet extra circulum ; & in locum ipſa , & circuli circumferentia contentum nulla alia recta linea duci poterit (7). II. Si circulum recta contingat linea ; quæ centrum cum puncto contactus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem (8) . III. Si circulum recta contingat linea , & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur ; hæc tranſibit per centrum circuli (9). IV. Si extra circulum ſumatur pun-

(1) Prop. 4. lib. 3.

(2) Prop. 14. lib. 3.

(3) Prop. 15. lib. 3.

(4) Prop. 28. lib. 3.

(5) Prop. 29. lib. 3. quæ eſt præcedentis converſa .

(6) Prop. 35. lib. 3.

(7) Prop. 16. lib. 3. Per hoc theorema nos quoque Euclides docet; & rectam lineam , quæ ab extremitate diametri ducitur , circulum contingere , illumque tangere in uno tantum puncto : alias intra ipſum caderet ; & angulum contactus, hoc eſt a tangente , & circuli peripheria contentum minorem eſſe quocumque angulo rectilineo acuto, & angulum ſemicirculi; hoc eſt diametro, & circuli peripheria comprehenſum, quocumque angulo acuto rectilineo eſſe majorem ; etenim in locum tangente , & circuli circumferentia contentum , nulla alia recta ex puncto contactus duci poteſt .

Neque exinde eruitur , angulum contactus nulla prorſus quantitate gaudere ; quia eſto tam minor ſit quocumque angulo acuto, ut per nullam rectam minui poſſit; poteſt tamen augeri ; & eſto minui nequeat per rectam lineam infiniteſimum angulum ordinis primi capientem , minui tamen poteſt per alias rectas dividentes hunc angulum infiniteſimum , nempe per aliam circuli circumferentiam deſcriptam per punctum contactus , & majore intervallo quam circuli centrum : etenim nomine quantitatis apud mathematicos id omne intelligitur , quod plus minuſque ſuſcipiens quocumque modo augeri poteſt , ac minui .

(8) Prop. 18. lib. 3.

(9) Prop. 15. lib. 3. ex qua colligitur : ſi intra circulum aliqua ponatur recta , atque ex uno ejus extremo alia extra circu-

Digitized by Google

punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum contingat, altera eumdem utcumque ſecet; rectangulum ſub ſecante tota, & portione extra circulum exiſtente contentum, æquale erit quadrato, quod fit ex tangente (1). V. Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum ſecet, altera incidat in eum; ſitque rectangulum ſub ſecante tota, & portione extra circulum exiſtente contentum æquale quadrato incidentis; incidens iſta recta linea tangens erit (2).

V. Tertii generis theoremata, quæ circulos ſibi invicem occurrentes ſpectant, ſunt quæ ſequuntur. I. Circuli, qui ſe mutuo ſecant; non poſſunt unum, idemque centrum habere (3). II. Circuli, qui ſeſe intus contingunt, non poſſunt unum, idemque centrum habere (4). III. Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non ſecat (5). IV. Si duo circuli ſeſe intus contingunt, recta conjungens centra ipſorum tranſibit per punctum contactus (6). V. Si duo circuli ſeſe extra contingant; recta conjungens centra ipſorum, tranſibit per punctum contactus (7). VI. Circulus circulum in pluribus, quam in uno puncto non contingit, ſive intra, ſive extra eum contingat (8).

VI. Quarti tandem generis theoremata, quæ exponunt affectiones angulorum, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſiſtunt; ſunt. I. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad circumferentiam; cum ſuper eodem arcu inſiſtunt (9). II. Qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales (10). III. Quadrilaterorum in circulo inſcriptorum anguli oppoſiti duobus rectis ſunt æquales (11). IV. In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales conſtitui non poſsunt ad eaſdem par-

culum ducatur, tria evenire poſſe. I. Rectam lineam intra circulum poſitam eſſe diametrum, ſeu per centrum tranſire. II. Ductam extra centrum eſſe tangentem. III. Unam alteri ad angulos rectos inſiſtere, quorum ſi duo contigerint; tertium neceſſario eveniet.

(1) Prop. 36. lib. 3. Hoc theorema duo nos docet. I. Si ab eodem extra circulum puncto quotvis ducantur ſecantes, omnia rectangula inter ſe æqualia eſſe; etenim ſingula quadrato tangentis æquantur. II. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt æquales eſſe: earum quippe quadrata ſingula eidem æquantur quadrato ex Commandino.

(2) Prop. 37. lib. 3. qua convertitur præcedens; & ex ea evincitur quoque, quæ ex eodem puncto ad circulum ducuntur rectæ, æquales eſſe tangentes.

(3) Prop. 5. lib. 3.
(4) Prop. 6. lib. 3.
(5) Prop. 10. lib. 3.
(6) Prop. 11. lib. 3.
(7) Prop. 12. lib. 3.
(8) Prop. 13. lib. 3.
(9) Prop. 20. lib. 3.
(10) Prop. 21. lib. 3.
(11) Prop. 22. lib. 3.

partes (1). V. In æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones conſtitutæ, ſunt etiam æquales (2). VI. In circulis æqualibus æquales anguli, æqualibus arcubus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias ſint poſiti (3). VII. In circulis æqualibus anguli, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias poſiti, æqualibus arcubus inſiſtunt, ſunt etiam æquales inter ſe (4). VIII. Angulus in ſemicirculo eſt rectus, qui vero eſt in portione majore eſt recto minor; & qui in portione minore, eſt recto major (5). IX. Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum ſecans ducatur, anguli ſub tangente, & ſecante contenti, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus conſtituuntur (6).

TERTII ELEMENTI PROBLEMATA.

VII. Per hujus Elementi problemata Euclides praxes exponit, quæ ſive ad circulum ipſum, ſive ad ea, quæ circulo adveniunt, pertinent; unde alia ſunt, quæ ad circulum in ſe inſpectum attinent; alia ad tangentem; alia denique ad angulum in circuli portione conſtitutum.

VIII. Prima ſunt. I. Dati circuli centrum invenire (7). II. Circuli portione data, invenire centrum circuli, cujus ea eſt portio, & circulum perficere (8). III. Datam circuli portionem bifariam dividere (9).

IX. Secundæ claſſis unum tantum eſt problema nimirum. I. Ex dato extra circulum puncto, tangentem ad circulum ducere (10).

X. Tertiæ tandem claſſis problemata ſunt. I. In data recta linea deſcribere portionem circuli, quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo dato (11). II. Ex dato circulo abſcindere portionem, quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo dato (12).

EX

(1) Prop. 23. lib. 3.
(2) Prop. 24. lib. 3.
(3) Prop. 26. lib. 3. Quod in hoc theoremate de æqualibus circulis demonſtrat Euclides, multo fortius de iiſdem circulis evincitur.
(4) Prop. 27. lib. 3. Quæ converſa eſt præcedentis; & eadem demonſtratio erit, ſi anguli æqualibus circumferentiis ejuſdem circuli inſiſtant.
(5) Prop. 31. lib. 3.
(6) Prop. 32. lib. 3.
(7) Prop. 1. lib. 3. Ex hoc problemate eſt perſpicuum, ſi in circulo recta quædam linea rectam aliam quandam bifariam ſecabit, & ad angulos rectos, in ſecante circuli centrum ineſſe.
(8) Prop. 25. lib. 3.
(9) Prop. 30. lib. 3.
(10) Prop. 17. lib. 3.
(11) Prop. 33. lib. 3.
(12) Prop. 34. lib. 3.

Digitized by Google

EX QUARTO ELEMENTO.

I. IN quarto elemento agit Euclides de inſcriptione, & circumſcriptione, ſive figurarum regularium in circulo, ſive circuli in figuris regularibus. Figuræ autem regulares, quas potiſſimum proſequitur, ſunt triangulum, quadratum, pentagonum, hexagonum, & quindecagonum (1). Omnes hujus elementi propoſitiones ſunt problemata, quorum quatuor reſpiciunt triangulum, quatuor aliæ quadratum, totidem aliæ pentagonum, una hexagonum, & una quindecagonum; & duæ tandem ſunt lemmata, figurarum conſtructioni inſervientia; hoc igitur ordine omnia recenſebimus: at prius lemmata ut ſimpliciora exponemus (2).

QUARTI ELEMENTI PROBLEMATA.

II. Problemata illa, quæ velut lemmata inſerviunt, ſunt duo iſta. I. In dato circulo aptare rectam lineam, quæ alteri datæ ſit æqualis. Oportet autem, ut data recta linea non ſit major diametro (3). II. Æquicrure triangulum conſtituere, cujus uterque angulorum ad baſim duplus ſit anguli verticalis (4).

III. Quæ reſpiciunt triangulum problemata, ſunt. I. In dato circulo deſcribere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (5). II. Circa datum circulum deſcribere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (6). III. In dato triangulo circulum deſcribere (7). IV. Circa datum triangulum circulum deſcribere (8).

Quæ

(1) Eſto varia ſit, & multiformis circumſcriptionum, & inſcriptionum figurarum contemplatio; Euclides tamen non multum admodum progreſſus eſt: perveniens namque ad hexagonum, & poſtremo quindecagoni angulos tradens (qui aſtrorum ſcientiam magis ſpectant) finem dicendi fecit; non quod alia, non fuit rimatus, ſed quod nullo negotio conſtrui queunt; ut Federicus Commandinus animadvertit.

(2) Omnes hujus elementi propoſitiones, ut inquit Guilielmus Whiſtonius, Trigonometriæ magis inſerviunt: earum namque ope figurarum, & corporum magnitudines, & varios aſtrorum adſpectus, & circuli quadraturam, & circulorum duplicatam rationem, & non pauca alia non ab re perſcrutamur.

(3) Prop. 1. lib. 4. Hæc, omneſque aliæ quarti libri propoſitiones, Euclidi adſcribuntur, demtis ſolummodo quatuor illis, quæ ad triangulum ſpectant: quæ teſte Andrea Tacquet Thaleti Mileſio debentur; quarum inventione lætitia elatus bovem immolaſſe dicitur.

(4) Prop. 10. lib. 4.

(5) Prop. 2. lib. 4.

(6) Prop. 3. lib. 4.

(7) Prop. 4. lib. 4.

(8) Prop. 5. lib. 4.

Digitized by Google

IV. Quæ vero ad quadratum. I. In dato circulo quadratum deſcribere (1). II. Circa datum circulum quadratum deſcribere (2). III. In dato quadrato circulum deſcribere (3). IV. Circa datum quadratum circulum deſcribere (4).

V. Circa pentagonum problemata ſunt. I. In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere (5). II. Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere (6). III. In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum deſcribere (7). IV. Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere (8).

VI. De hexagono, & quindecagono problemata ſunt duo dumtaxat, nimirum. I. In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere (9). II. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere (10).

EX QUINTO ELEMENTO.

I. IN quinto Elemento exponit Euclides utilem, neceſſariamque doctrinam proportionum in genere, hoc eſt, magnitudines generatim inter ſe comparatas conſiderat, earumque analogiam perſcrutatur (11). Quoniam autem proportionem ipſam ope multiplicium oſtendit; perinde propoſitiones omnes hujus Elementi, quæ

 omnes

(1) Prop. *6.* lib. 4.
(2) Prop. 7. lib. 4.
(3) Prop. 8. lib. 4.
(4) Prop. 9. lib. 4.
(5) Prop. 11. lib. 4.
(6) Prop. 12. lib. 4.
(7) Prop. 13. lib. 4.
(8) Prop. 14. lib. 4.
(9) Prop. 15. lib. 4. Poſt hoc problema Euclides tria alia pro ſuæ doctrinæ ordine adnectere debuerat, alterum de deſcriptione hexagoni circa datum circulum; alterum de deſcriptione circuli in dato hexagono; alterum tandem de deſcriptione circuli circa datum hexagonum, atque alia de circumſcriptione quindecagoni circa circulum, & viciſſim; at hæc facillima, & nullius negotii aliorum ſtudio commiſit.
(10) Prop. *16.* lib. 4.
(11) Totum hoc quintum planorum elementum commune eſt Geometriæ, Arithmeticæ, Muſicæ, Aſtronomiæ, Staticæ, & omni ſimpliciter Matheſeos diſciplinæ; quæ enim in ipſo demonſtrantur theoremata, non ſolum Geometriæ congruunt; verum ad ceterarum omnium uſus, & contemplationes referuntur; quippe quæ proportionibus inter ſe connexis fere totæ nitantur, & modos de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc mutuari ſolent; ſpeciatim vero Geodeſia, ſeu practica Geometria, quæ linearum, figurarum, atque corporum menſuras, quas complectitur, e proportionum doctrina plerumque haurit; & Arithmetica, cujus omnes propoſitiones, etiam ſublatis ſeptimo, octavo, nono, & de numeris ex profeſſo agentibus libris, ex his demonſtrari commode poſſent; & Statica, quæ nonniſi per doctrinam proportionum corporum pondera perſcrutatur. Perinde tam utile eſt, & neceſſarium, ut ſi ejus doctrina de medio auferretur, nihil præclarum, aut egregium in matheſi relinqueretur.

omnes ſunt num. 25. ab Euclide collectæ (1), omneſque theoremata, partim reſpiciunt quantitates æquemultiplices, partim quantitates proportionales; atque argumentandi rationem e proportione petitam, etiam præſtant (2).

QUINTI ELEMENTI THEOREMATA.

II. Theoremata primæ claſſis, quæ quantitates æquemultiplices ſpectant, ſunt, quæ ſequuntur. I. Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquemultiplices; quotuplex eſt una unius, totuplices erunt & omnes omnium (3). II. Si prima ſecundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ tam multiplex, quam ſexta quartæ; erit compoſita ex prima, & quinta tam multiplex ſecundæ, quam compoſita ex tertia, & ſexta multiplex quartæ (4). III. Si prima ſecundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ; æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt etiam æquemultiplices ſecundæ, & quartæ (5). IV. Si prima ad ſecundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ, & quartæ eamdem quoque rationem habebunt (6). V. Si tota totius tam multiplex ſit, quam ablata ablatæ; erit reliqua reliquæ tam multiplex, quam tota totius (7). VI. Si duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum: & ex iis ablatæ quædam ſint earumdem æquemultiplices; erunt & reliquæ vel eiſdem æquales, vel earumdem æquemultiplices (8).

III. Ad quantitates vero proportionales theoremata iſta ſpectant. I. Æquales ad eamdem, eamdem habent rationem; & eadem ad æquales (9). II. Inæqualium magnitudinum major ad eamdem ma-

(1) Eſto propoſitiones omnes hujus elementi innumeræ ſint; Euclides tamen ſolum 25. collegit, atque ceteræ, quæ v. libro adjectæ reperiuntur, a Campano, Theone, aliiſque fuerunt additæ.

(2) Totum hoc elementum ajunt eſſe Eudoxii cujuſdam, qui Platonis magiſter fuit, teſte Eudemo, Proclo, & Commandino.

(3) Prop. 1. lib. 5.

(4) Prop. 4. lib. 5.

(5) Prop. 3. lib. 5.

(6) Prop. 4. lib. 5. Hoc theorema propius ſpectat ad demonſtrationem definitionis magnitudinum, quæ ſunt in eadem proportione, ut eſt, quando æquemultiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, atque æquemultiplices ſecundæ, & quartæ, hoc eſt, conſequentium, vel una ſuperant, vel una æquales ſunt, vel una deficiunt; hic enim demonſtrat, & ipſas inter ſe eamdem habere proportionem. Ex Commandino.

(7) Prop. 5. lib. 5.

(8) Prop. 6. lib. 5.

(9) Prop. 7. lib. 5.

Digitized by Google

majorem habet rationem, & eadem ad minorem. (1) III. Quæ ad eamdem eamdem habent rationem, inter ſe ſunt æquales; & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter ſe æquales ſunt (2). IV. Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major eſt: ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor (3). V. Rationes, quæ eidem ſunt æquales, inter ſe ſunt etiam æquales (4). VI. Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales; erit ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes (5). VII. Si prima habuerit ad ſecundam eamdem rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam habuerit rationem majorem, quam quinta ad ſextam; & prima ad ſecundam majorem quoque rationem habebit, quam quinta ad ſextam (6). VIII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima, & ſecunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta (7). IX. Partes cum ſuis æquemultiplicibus comparatæ eamdem cum iis ſervant rationem (8). X. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutando etiam proportionales erunt (9). XI. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & dividendo etiam proportionales erunt (10). XII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint & componendo etiam proportionales erunt (11). XIII. Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam, ut tota ad totam (12). Unde colligere pronum eſt, quod ſi quatuor magnitudines proportionales fuerint; convertendo etiam proportionales erunt. XIV. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis totidem; primæ ipſarum erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem (13). XV. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipſarum quoque erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem (14). XVI. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ra-

 tio-

(1) Prop. 8. lib. 5.
(2) Prop. 9. lib. 5.
(3) Prop. 10. lib. 5.
(4) Prop. 11. lib. 5.
(5) Prop. 12. lib. 5.
(6) Prop. 13. lib. 5.
(7) Prop. 14. lib. 5. Hoc theorema lemma eſt ſextidecimi theorematis.
(8) Prop. 15. lib. 5. (9) Prop. 16. lib. 5.
(10) Prop. 17. lib. 5.
(11) Prop. 18. lib. 5.
(12) Prop. 19. lib. 5.
(13) Prop. 20. lib. 5. Hoc theorema eſt lemma vigeſimi ſecundi.
(14) Prop. 21. lib. 5. Theorema iſtud eſt lemma vigeſimi tertii.

Digitized by Google

tione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipſarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (1). XVII. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus; primæ ipſarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (2). XVIII. Si prima ad ſecundam habuerit eamdem rationem, quam tertia ad quartam; fuerit autem ut quinta ad ſecundam, ita ſexta ad quartam; erit compoſita ex prima, & quinta ad ſecundam, ut compoſita ex tertia, & ſexta ad quartam (3). XIX. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima ſimul reliquis duabus majores erunt (4).

EX SEXTO ELEMENTO.

I. IN ſexto tandem elemento Euclides proportionis doctrinam, quam univerſim in quinto elemento de omni generatim magnitudine expoſuit; uſibus variis planarum figurarum applicare contendit; atque proportiones, quæ in figuris ipſis occurrunt, oſtendit. Unde a triangulis figurarum ſimpliciſſimis exorſus, eorum latera, & areas, prout ſibi invicem proportione correſpondent, perſcrutatur; & lineas proportionales, atque figurarum augumenta, & decrementa proportionalia definit; & regulam auream, ſive proportionalem totius arithmeticæ fundamentum aperit; atque omnia, quæ ad intime cognoſcendam proportionem planorum expetebantur, recenſet (5). Hoc autem elementum triginta tribus propoſitionibus comprehenditur, quarum tres & viginti ſunt theoremata, & decem problemata; quæ omnia per certas claſſes proponemus.

THEOREMATA SEXTI ELEMENTI.

II. Iſtiuſmodi elementi theoremata juxta varias planorum propor-

(1) Prop. 22. lib. 5.
(2) Prop. 23. lib. 5.
(3) Prop. 24. lib. 5.
(4) Prop. 25. lib. 5. Per hæc poſtrema theoremata a ſextadecima exordiendo exponuntur omnes ratiocinandi modi; quos tradit Euclides in definitionibus quinti elementi a definitione undecima uſque ad poſtremam; ut abunde Chriſtophorus Clavius planum facit.

(5) Totum hoc ſextum elementum Euclidi inventori vulgo adſcribitur; attamen complures alii variis ejuſdem propoſitionibus inſudarunt; omneſque Greciæ Geometræ ſummo ſtudio ipſis incumbuerunt, ut Plato, Architas Tarentinus, Menæchmus, Eratoſthenes, Philo Byzantius, Hero, Apollonius Pergæus, Nicomedes, Pappus, aliique, teſte Eudemo, Proclo, & Eutocio.

portiones, quas demonſtrant, partim reſpiciunt rectas, quibus figuræ ipſæ continentur; partim figuras ipſas rectilineas, partim denique angulos, qui in æqualibus circulis ſive ad centra, ſive ad circumferentias ſunt poſiti; atque ſectores, qui ex eiſdem circulis abſcinduntur.

III. Rectarum igitur, quibus figuræ ipſæ continentur, proportiones hæc per theoremata Euclides demonſtrat, nimirum. I. Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, ea ſecabit alia duo latera proportionaliter; & viciſſim ſi ſecet proportionaliter duo latera trianguli, ea tertio lateri parallela erit (1). II. Recta, quæ ſecat angulum verticalem alicujus trianguli bifariam, ſecabit baſim in ratione laterum; & viciſſim recta, quæ ſecat baſim alicujus trianguli in ratione laterum, ſecabit angulum verticalem bifariam (2). III. Triangula æquiangula habent latera circum æquales angulos proportionalia; & homologa ſunt latera illa, quæ æquales angulos ſubtendunt (3). IV. Triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula; & æquales habebunt eos angulos, quos homologa latera ſubtendunt (4). V. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum iſtos angulos proportionalia, ſunt etiam æquiangula, & æquales habent angulos illos, quos homologa latera ſubtendunt (5). VI. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent; latera vero circum alios angulos proportionalia; & reliquorum utrumque ſimul vel minorem, vel non minorem recto; erunt etiam æquiangula; & æquales habebunt angulos illos, circa quos ſunt latera proportionalia (6). VII. Si in triangulo rectangulo ex angulo recto ad baſim perpendicularis demittatur; hæc dividet triangulum in duo alia triangula, quæ cum toti, tum inter ſe ſimilia erunt (7).

IV. Quæ

(1) Prop. 2. lib. 6. Hoc theorema nos quoque docet, ſi ad unum trianguli latus ductæ fuerint plures parallelæ; fore omnia laterum ſegmenta proportionalia.

(2) Prop. 3. lib. 6. Quod theorema indicat etiam, ſi recta, quæ angulum trianguli bifariam ſecat, biſecabit etiam baſim, triangulum fore Iſoſceles, quia duo latera habebit æqualia, & biſecans recta erit perpendicularis baſi.

(3) Prop. 4. lib. 6.

(4) Prop. 5. lib. 6.

(5) Prop. 6. lib. 6.

(6) Prop. 7. lib. 6. Ex hoc theoremate, & quatuor præcedentibus conſtat ſimilitudinem triangulorum evinci poſſe; ſi habeant latera proportionalia; ſi habeant unum angulum uni angulo æqualem; & latera circum æquales angulos proportionalia; & reliquos augulos ejuſdem ſpeciei inter ſe.

(7) Prop. 8. lib. 6. Ex hoc theoremate eſt manifeſtum; ſi in triangulo rectan-

IV. Quæ vero figuras ipſas rectilineas proportionales oſtendunt theoremata, ſunt quæ ſequuntur. I. Triangula, & parallelogramma eamdem altitudinem habentia inter ſe ſunt ut baſes (1). II. Parallelogramma, quæ æqualia ſunt; & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia; & viciſſim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, ſunt etiam æqualia inter ſe (2). III. Triangula, quæ æqualia ſunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia; & viciſſim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, ſunt etiam æqualia inter ſe (3). IV. Si ſint quatuor rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis; & viciſſim ſi rectangulum ex mediis æquale ſit rectangulo ex extremis, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt (4). V. Si ſint tres rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex extremis æquale quadrato, quod deſcribitur a media; & viciſſim, ſi rectangulum ex extremis æquale ſit quadrato a media deſcripto, tres rectæ lineæ proportionales erunt (5). VI. Triangula ſimilia ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum homologorum (6). VIII. Poligona ſimilia dividuntur in triangula numero æqualia, ſimilia, & homologa totis; duplicatamque habent rationem laterum homologorum (7). IX. Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, inter ſe ſunt ſimilia (8). X. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, erunt re-

cti

ctangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur, ductam baſis partibus mediam proportionalem eſſe; & quodlibet latus trianguli medium eſſe proportionale inter baſim, & unamquamque partem.

(1) Prop. 1. lib. 6. Hoc eſt maximum theorema, a quo totum ſextum dependet elementum; imo quidquid de quibuſvis figuris ſive planis, ſive ſolidis fuit umquam demonſtratum.

(2) Prop. 14. lib. 6. Ex theoremate iſto pendet demonſtratio regulæ inverſæ, ſive reciprocæ proportionum, quæ ex datis tribus terminis quartum invenit, multiplicando in se invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, ut inde habeatur quartus.

(3) Prop. 15. lib. 6. Ex hoc, & præcedenti theoremate evincitur, tam parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant baſes, & altitudines, eſſe æqualia, & contra.

(4) Prop. 16. lib. 6. Hinc cujuslibet trianguli rectanguli aream ex unius lineæ rectæ dimenſione facile dimetimur.

(5) Prop. 17. lib. 6. Hinc lineam inacceſſam, cujus terminus alter eſt acceſſibilis, metiri diſcimus.

(6) Prop. 19. lib. 6.

(7) Prop. 20. lib. 6. Ex hoc theoremate indigitatur methodus figuram quamvis rectilineam augendi, vel minuendi in ratione data.

(8) Prop. 21. lib. 6.

ctilinea ſimilia, ſimiliterque ab eis deſcripta etiam proportionalia; & viciſſim, ſi rectilinea proportionalia ſint, ipſæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt (1). XI. Parallelogramma æquiangula habent inter ſe rationem ex lateribus compoſitam (2). XII. Parallelogramma, quæ ſunt circa diametrum alterius, cum toti, tum inter ſe ſimilia ſunt (3). XIII. Si ex parallelogrammo aliud auferatur, quod communem cum eo angulum habens, ſit eidem ſimile, ſimiliterque poſitum; conſiſtet etiam cum illo circa eamdem diagonalem (4). XIV. Omnium parallelogrammorum, quæ ad eamdem rectam applicata, deficiunt parallelogrammis alicui dato ſimilibus, maximum eſt illud, quod applicatur ſuper dimidia (5). XV. In triangulis rectangulis figura quævis a latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis erit figuris, quæ illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ, deſcribuntur a lateribus, rectum angulum continentibus (6). XVI. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus proportionalia, & ita ſint compoſita ad eumdem angulum, ut habeant quoque latera homologa parallela; reliqua eorum latera in directum erunt (7).

V. Proportiones tandem, quæ cum ad angulos ſive ad centra, ſive ad circumferentias conſtitutos, tum ad ſectores, qui ex iiſdem circulis abſcinduntur, ſpectant, hoc unico theoremate continentur, nimirum. In æqualibus circulis anguli ſive ad centra, ſive ad circumferentias poſiti eamdem habent rationem cum arcubus, quibus inſiſtunt; ſimiliter autem & ſectores (8).

EX SEXTO ELEMENTO PROBLEMATA.

VI. Eodem tandem ordine ſexti Elementi problemata ſive ad rectas, ſive ad figuras proportionales conſtituendas ſpectant.

VII. Primæ claſſis ſunt. I. A data recta linea optatam partem abſcindere (9). II. Datam rectam lineam ſecare in partes proportionales partibus, in quas ſecta eſt alia data recta linea (10). III.

(1) Prop. 22. lib. 6.
(2) Prop. 23. lib. 6.
(3) Prop. 24. lib. 6.
(4) Prop. 26. lib. 6. Hinc motuum compoſitionem æſtimare diſcimus ex Whiſtonio in Tacquet.
(5) Prop. 27. lib. 6.
(6) Prop. 31. lib. 6. Hoc theorema univerſalius eſt propoſitione 47. lib. 1. quia extenditur ad omnes rectilineas figuras.
(7) Prop. 32. lib. 6.
(8) Prop. 33. lib. 6. Hinc perſpicuum eſt etiam angulum eſſe ad angulum, ut ſector ad ſectorem.
(9) Prop. 9. lib. 6.
(10) Prop. 10. lib. 6. Ex hoc problemate diſcitur modus, quo recta data in quotvis æquales partes ſecari poterit.

Digitized by Google

III. Datis duabus rectis lineis tertiam proportionalem invenire (1). Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire (2). V. Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire (3). VI. Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione dividere (4).

VIII. Problemata tandem ſecundæ claſſis, quæ ad proportionem rectilineorum ſpectant, ſunt. I. A data recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere (5). II. Rectilineum conſtituere, quod ſit ſimile uni dato, & æquale alteri dato (*6*). III. Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod alteri dato ſit ſimile: oportet autem, ut datum rectilineum non majus ſit eo parallelogrammo, quod applicatum ſuper dimidia datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo, quod eidem dato ſit ſimile (7). IV. Ad datam rectam lineam dato rectilineo, æquale parallelogrammum applicare, excedens parallelogrammo, quod alteri dato ſit ſimile (8).

(1) Prop. 11. lib. *6*.
(2) Prop. 12. lib. *6*.
(3) Prop. 13. lib. *6*.
(4) Prop. 30. lib. *6*. Hujus ſectionis admirabilis eſt vis in corporum regularium inſcriptione, & comparatione, ut ait Tacquet.
(5) Prop. 18. lib. *6*. Hinc methodus aperitur ædificia omnia in tabulis deſcribendi: etenim per hoc problema figuræ quamvis ingentes ad ſimiles figuras exiguas rediguntur.
(6) Prop. 25. lib. *6*.
(7) Prop. 28. lib. *6*.
(8) Prop. 29. lib. *6*.

VA1
1544585